

转子轴系耦合振动模型一般性解析式 推导与分析

伍 敏¹, 杨晟博¹, 鲍 文¹, 杨金福^{1,2}

(1. 哈尔滨工业大学 能源科学与工程学院, 哈尔滨 150001;

2. 中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100190)

摘 要: 基于转子受到的线性与非线性作用机理,引入线性尺度因子、非线性尺度因子和耦合强度比作为特征参量,分别构建了阻尼力和刚度力的一般表达式,进而推导出转子轴系一般形式的线性与非线性耦合的振动模型.基于仅考虑质量不平衡激励的单圆盘转子轴系,应用多尺度法求解出该方程的稳态解及瞬态解.通过对解析解的分析,揭示了线性与非线性耦合作用及响应的振动机理.通过数值计算分析了瞬态时间尺度因子对响应的影响,瞬态时间尺度因子越大,瞬态解衰减越快,越接近于稳态解.对稳态解短时傅里叶变换的幅频特性进行分析,可发现1倍频出现了非线性特征,3倍频存在双峰特征,进一步阐述了非线性尺度因子对转子轴系耦合振动的影响.

关 键 词: 转子轴系; 耦合振动; 解析解; 非线性尺度因子; 瞬态时间尺度因子

中图分类号: V231.92; O322

文献标志码: A

Detailed deduction and analysis of the general analytical model of coupling vibration in a rotor system

WU Min¹, YANG Sheng-bo¹, BAO Wen¹, YANG Jin-fu^{1,2}

(1. School of Energy Science and Engineering,

Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China;

2. Institute of Engineering Thermophysics,

Chinese Academy of Science, Beijing 100190, China)

Abstract: Based on the mechanism of linear and nonlinear forces on the rotor system, the linear scale factor, nonlinear scale factor and coupling ratio was introduced as characteristic parameters, the general expressions of damping and stiffness forces were established, so a general form of linear and nonlinear coupling vibration model was formulated. Considering a single-disc rotor system excited only by mass unbalance force, the steady-state and transient-state solutions were derived through multi-scale method. The analysis on the analytical solutions showed the vibration mechanism of linear and nonlinear coupling effects and responses. The influence of transient time scale factor on responses was analyzed through numerical calculation. When transient time scale factor was larger, the transient-state solution decayed faster, approaching the steady-state solution closer. The amplitude-frequency characteristics were also analyzed by the short time Fourier transform of the steady-state solution. It can be

收稿日期: 2016-08-25

基金项目: 微型移动式燃气轮机冷热电联供技术及示范(2012BAA11B02)

作者简介: 伍敏(1984—),女,博士生,主要从事非线性转子动力学研究.

引用格式: 伍敏,杨晟博,鲍文,等.转子轴系耦合振动模型一般性解析式推导与分析[J].航空动力学报,2017,32(5):1112-1119.

WU Min, YANG Shengbo, BAO Wen, et al. Detailed deduction and analysis of the general analytical model of coupling vibration in a rotor system[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(5): 1112-1119.

seen that the first harmonic generation has nonlinear characteristics and the third harmonic generation has double-peak characteristics, further elaborating the influences of nonlinear scale factor on the coupling vibration of the rotor system.

Key words: rotor system; coupling vibration; analytical solution; nonlinear scale factor; transient time scale factor

随着先进动力装备的技术水平不断提升,能源动力领域的技术引领及支撑作用逐渐显著,使得资源、能源与环境一体化的发展模式推动技术革命,逐渐成为能够解决人类生存和发展问题的有效途径之一^[1-2]. 近年来,在航空航天、车船与小型分布式能源等领域的涡轮动力系统中普遍存在以提高涡轮动力轴系运行转速为核心,使系统逐步向高转速、高功率比、高推质比发展的趋势^[3]. 作为先进动力装备“心脏”的涡轮轴系,其转速的不断提高,系统的轻结构、大柔性特征逐渐凸显,使得系统更容易出现非线性振动失稳现象^[4-7]. 这对轴系稳定性研究的理论研究方法和工程技术应用提出了更高的要求.

Lund^[8]于 1965 年首次提出了把油膜力等价成八刚度阻尼系数的线性模型. Glienicke 等^[9]、Alford^[10]等对 Lund 模型系数进行了验证和简化,Childs^[11]引入了附加质量. Bently 等^[12-13]引入了流体周向平均速度比来描述其他物理修正项用以完善模型. 目前,典型的线性模型和线性理论分析方法在工程实际得到了广泛的应用,而在分析非线性响应特征时也具有不可回避的局限性. Ravikovich^[14]认为转子的涡动、振荡等现象是由非线性力引起的. 非线性响应的复杂机理和行为特征需要应用非线性模型以及相应的非线性分析方法进行研究^[15-16]. 现有的针对轴系非线性响应主导模式的模型和分析方法尚不够完善,无论是在响应机理的阐述,还是在合理性、可靠性的分析方面,都不能充分的满足理论分析和工程实际的需求^[17].

本文针对转子轴系的耦合振动问题,引入特征参量构建了一个一般形式的线性与非线性耦合的振动模型. 对典型的单盘转子轴系推导出线性与非线性耦合振动方程,并应用多尺度法推导稳态解和瞬态解. 进而通过分析解析解,揭示了线性与非线性耦合振动作用及响应的机理,同时也阐述了非线性尺度因子及瞬态时间尺度因子对转子轴系耦合振动的影响.

1 转子轴系耦合振动一般性模型

考虑一般的理想的单跨单圆盘转子,如图 1.

图中 k 为刚度, c 为阻尼. 尽管单圆盘转子结构比较简单,但其能够充分地反映转子线性与非线性的动力学行为.

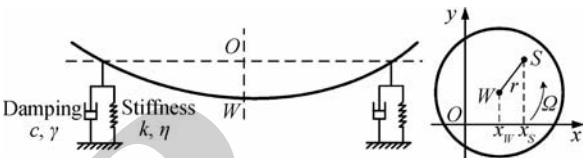


图 1 转子受力分析图

Fig. 1 Schematic of force analysis of rotor system

若圆盘质量为 m , 忽略转轴质量, 圆盘质量偏心距为 r , 转子旋转频率为 Ω , 逆时针为正. 考虑点 W 受到的支撑作用 F , 外界激励只考虑不平衡质量力, 根据牛顿第二定律, 转子运动方程为

$$m\ddot{x}_s - F(x_w, \dot{x}_w) = 0 \tag{1}$$

式中

$$x_s = x_w + r\cos(\Omega t) \tag{2}$$

将式(2)代入式(1), 有

$$m\ddot{x}_w - F(x_w, \dot{x}_w) - m\Omega^2 r\cos(\Omega t) = 0 \tag{3}$$

一般来说, 对于一个轴系, 转子受到的力可以分为刚度力和阻尼力, 即

$$F(x, \dot{x}) = f_k(x) + f_c(\dot{x}) \tag{4}$$

式中 f_k 为刚度力, f_c 为阻尼力. 按照线性与否来分, 转子受到的力也可以分为线性力和非线性力^[8,14], 如图 2. 定义 ξ 为线性尺度因子, ϵ 为非线

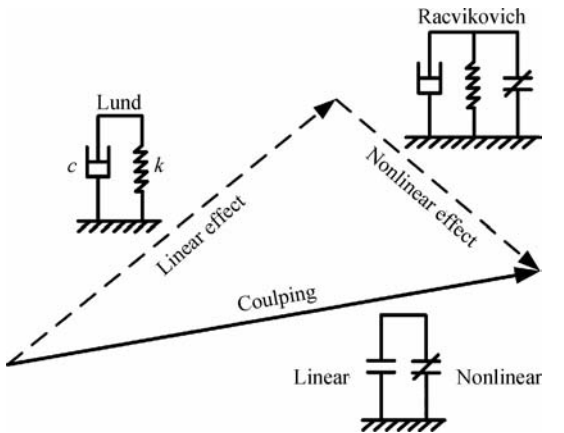


图 2 转子轴系振动模型按受力类型的分类图

Fig. 2 Category of rotor system vibration models by force type

性尺度因子, $\Theta = \epsilon/\xi$ 为耦合强度比, 有

$$F(x, \dot{x}) = \xi f_1 + \epsilon f_n = \xi(f_1 + \Theta f_n) \quad (5)$$

式中 f_1 为线性力, f_n 为非线性力. 当 $\Theta = 0$ 时, 系统只受到线性力作用. 当 Θ 取值在 $[0, 1, 10]$ 区间时, 系统作用力表现为线性力与非线性力的耦合; 当 $\Theta < 0.1$ 时可认为是线性作用主导; 当 $\Theta > 10$ 时可认为是非线性作用主导.

关于非线性项表达式的选取, 转子轴系的刚度力^[18-20]和阻尼力^[21-22]分别为

$$\begin{aligned} f_k(x) &= -\xi_k(x + \Theta_k x^3) \\ f_c(\dot{x}) &= -\xi_c(\dot{x} + \Theta_c |\dot{x}| \dot{x}) \end{aligned} \quad (6)$$

式中 ξ_k 为刚度线性尺度因子, ξ_c 为阻尼线性尺度因子, Θ_k 为刚度耦合强度比, Θ_c 为阻尼耦合强度比. 将式(6)代入式(3), 省略下标 W , 转子轴系振动方程的一般形式为

$$m\ddot{x} + \xi_k(x + \Theta_k x^3) + \xi_c(\dot{x} + \Theta_c |\dot{x}| \dot{x}) - m\Omega^2 r \cos(\Omega t) = 0 \quad (7)$$

对线性尺度因子 ξ 和耦合强度比 Θ 做如下代换

$$\begin{cases} \xi_k = \omega_0^2 m, & \Theta_k = \frac{\epsilon \beta_0^2}{\omega_0^2} \\ \xi_c = 2\mu m, & \Theta_c = \frac{\epsilon \alpha_0^2}{2\mu} \\ \mu = \frac{c}{2m}, & \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \\ \epsilon \alpha_0^2 = \frac{\gamma}{m}, & \epsilon \beta_0^2 = \frac{\eta}{m} \end{cases} \quad (8)$$

式中 μ 为线性阻尼系数, ω_0 为固有频率, α_0 为非线性阻尼放大系数, β_0 为非线性刚度放大系数, 均为常数. 当系统为正阻尼条件 ($|\dot{x}| \dot{x} = \dot{x}^2$) 时, 将式(8)代入式(7), 方程化为

$$\ddot{x} + 2\mu \dot{x} + \epsilon \alpha_0^2 \dot{x}^2 + \omega_0^2 x + \epsilon \beta_0^2 x^3 = \Omega^2 r \cos(\Omega t) \quad (9)$$

这个模型是针对高速柔性转子提出的一种基于大变形、大扰动假设的非线性解析模型, 重点研究转子轴系振动非线性响应主导模式下的共振、谐振和振荡等一系列典型的非线性转子动力学行为.

2 耦合振动模型的详细推导

对于式(9)的模型方程, 将给出稳态解和瞬态解的详细推导过程, 应用多尺度法推导二次近似解, 设

$$x = x_0(T_0, T_1) + \epsilon x_1(T_0, T_1) \quad (10)$$

其中

$$T_0 = t, \quad T_1 = \epsilon t \quad (11)$$

不妨设初始条件为

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = 0 \quad (12)$$

有

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{\partial x_0}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial x_0}{\partial T_1} + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \\ \ddot{x} &= \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0^2} + 2\epsilon \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial^2 x_0}{\partial T_1^2} + \epsilon \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0^2} + \\ &\quad 2\epsilon^2 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_0 \partial T_1} + \epsilon^3 \frac{\partial^2 x_1}{\partial T_1^2} \\ (\dot{x})^2 &= \left(\frac{\partial x_0}{\partial T_0} \right)^2 + \left(\epsilon \frac{\partial x_0}{\partial T_1} + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \right)^2 + \\ &\quad 2 \frac{\partial x_0}{\partial T_0} \left(\epsilon \frac{\partial x_0}{\partial T_1} + \epsilon \frac{\partial x_1}{\partial T_0} + \epsilon^2 \frac{\partial x_1}{\partial T_1} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

将上式代入方程(9), 按照 ϵ 的幂次排列, 写成 D 算子形式为

$$\begin{aligned} \epsilon^0: & D_0^2 x_0 + 2\mu D_0 x_0 + \omega_0^2 x_0 = \\ & \frac{1}{2} \Omega^2 r (e^{i\Omega T_0} + e^{-i\Omega T_0}) \\ \epsilon^1: & D_0^2 x_1 + 2\mu D_0 x_1 + \omega_0^2 x_1 = \\ & -2D_0 D_1 x_0 - 2\mu D_1 x_0 - \alpha_0^2 (D_0 x_0)^2 - \beta_0^2 x_0^3 \end{aligned} \quad (14)$$

设式(14)中 ϵ^0 的解为

$$\begin{aligned} x_0 &= C(T_1) e^{r_1 T_0} + \bar{C}(T_1) e^{\bar{r}_1 T_0} + Q e^{i\Omega T_0} + \bar{Q} e^{-i\Omega T_0} \\ r_1 &= -\mu + j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} \\ Q &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega^2 r}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega} \end{aligned} \quad (15)$$

式中 C 为未知复函数, 上划线表示共轭函数. 将式(15)代入式(14)中 ϵ^1 , 得到

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + 2\mu D_0 x_1 + \omega_0^2 x_1 &= \\ -[2D_1 C(r_1 + \mu) + 6\beta_0^2 C Q \bar{Q} + 3\beta_0^2 C^2 \bar{C} e^{-2\mu T_0}] e^{r_1 T_0} &- \\ \alpha_0^2 Q \bar{Q} \Omega^2 - \alpha_0^2 C \bar{C} r_1 \bar{r}_1 e^{-2\mu T_0} - 3\beta_0^2 Q^2 \bar{Q} e^{i\Omega T_0} &+ \\ \alpha_0^2 \Omega^2 e^{2i\Omega T_0} - \beta_0^2 Q^3 e^{3i\Omega T_0} - 2j\alpha_0^2 C r_1 Q \Omega e^{r_1 T_0 + i\Omega T_0} &+ \\ 2j\alpha_0^2 C r_1 \bar{Q} \Omega e^{r_1 T_0 - i\Omega T_0} - 6\beta_0^2 C \bar{C} Q e^{-2\mu T_0 + j\Omega T_0} &- \\ 3\beta_0^2 C^2 Q e^{2r_1 T_0 + j\Omega T_0} - 3\beta_0^2 C^2 \bar{Q} e^{2r_1 T_0 - j\Omega T_0} &- \\ 3\beta_0^2 C Q^2 e^{r_1 T_0 + 2j\Omega T_0} - 3\beta_0^2 C \bar{Q}^2 e^{r_1 T_0 - 2j\Omega T_0} &- \\ \alpha_0^2 C^2 r_1^2 e^{2r_1 T_0} - \beta_0^2 C^3 e^{3r_1 T_0} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (16)$$

式中 c. c. 为前面各项的共轭. 为了避免响应振幅无穷大, 期久项(即首项)的系数需为零, 有

$$2D_1 C(r_1 + \mu) + 6\beta_0^2 C Q \bar{Q} + 3\beta_0^2 C^2 \bar{C} e^{-2\mu T_0} = 0 \quad (17)$$

对于任意的无加速度的点, 均有 $T_0 = 0$, 则

$$e^{-2\mu T_0} = 1 \quad (18)$$

故

$$2D_1 C(r_1 + \mu) + 6\beta_0^2 C Q \bar{Q} + 3\beta_0^2 C^2 \bar{C} = 0 \quad (19)$$

令

$$C = \frac{1}{2} a e^{i\varphi} \quad (20)$$

式中 a, φ 都是 T_1 的实函数, 将式(20)、式(15)中

的 r_1 和 Q 代入式(19),有

$$(-j\dot{a} + a\dot{\varphi})\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta_0^2 \Omega^4 r^2 a}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} = \frac{3}{8} \beta_0^2 a^3 \quad (21)$$

按照实部、虚部分别求解,虚部为

$$-\dot{a}\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} = 0 \quad (22)$$

可得

$$a = a_0 = \text{const} \quad (23)$$

实部为

$$a\dot{\varphi}\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{\beta_0^2 \Omega^4 r^2 a}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} = \frac{3}{8} \beta_0^2 a^3 \quad (24)$$

可得

$$\begin{aligned} x_1 = & -\frac{\alpha_0^2 C \bar{C} r_1 \bar{r}_1}{\omega_0^2} e^{-2\mu T_0} - \frac{\alpha_0^2 Q \bar{Q} \Omega^2}{\omega_0^2} - \frac{3\beta_0^2 Q^2 \bar{Q}}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega} e^{j\Omega T_0} + \frac{\alpha_0^2 Q^2 \Omega^2}{\omega_0^2 - 4\Omega^2 + 4j\mu\Omega} e^{2j\Omega T_0} - \\ & \frac{\beta_0^2 Q^3}{\omega_0^2 - 9\Omega^2 + 6j\mu\Omega} e^{3j\Omega T_0} + \frac{2ja_0^2 C r_1 Q}{2\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega} e^{r_1 T_0 + j\Omega T_0} + \frac{2j\alpha_0^2 C r_1 \bar{Q}}{2\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} - \Omega} e^{r_1 T_0 - j\Omega T_0} - \\ & \frac{6\beta_0^2 C \bar{C} Q}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\mu\Omega} e^{-2\mu T_0 + j\Omega T_0} + \frac{3\beta_0^2 C^2 Q}{-4\mu^2 + 3\omega_0^2 + 4j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega^2 + 2j\mu\Omega + 4\Omega\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} e^{2r_1 T_0 + j\Omega T_0} + \\ & \frac{3\beta_0^2 C^2 \bar{Q}}{-4\mu^2 + 3\omega_0^2 + 4j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega^2 - 2j\mu\Omega - 4\Omega\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} e^{2r_1 T_0 - j\Omega T_0} + \\ & \frac{3\beta_0^2 C Q^2}{4\Omega(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega)} e^{r_1 T_0 + 2j\Omega T_0} + \frac{3\beta_0^2 C \bar{Q}^2}{4\Omega(-\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega)} e^{r_1 T_0 - 2j\Omega T_0} + \\ & \frac{\alpha_0^2 C^2 r_1^2}{-4\mu^2 + 3\omega_0^2 + 4j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} e^{2r_1 T_0} + \frac{\beta_0^2 C^3}{-12\mu^2 + 8\omega_0^2 + 12j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} e^{3r_1 T_0} + \text{c. c.} \end{aligned} \quad (27)$$

将式(15)和式(27)代入式(10),可得 x 的解为

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{2} a_0 \exp \left[-\mu t + j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + j \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + j\varphi_0 \right] + \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{\Omega^2 r}{\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega} e^{j\Omega t} - \frac{1}{4} \epsilon \alpha_0^2 a_0^2 e^{-2\mu t} - \frac{\epsilon \alpha_0^2 \Omega^6 r^2}{4\omega_0^2 [(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2]} - \\ & \frac{3\epsilon \beta_0^2 \Omega^6 r^3}{8(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega)^3 (\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\mu\Omega)} e^{j\Omega t} + \frac{\epsilon \alpha_0^2 \Omega^6 r^2}{4(\omega_0^2 - 4\Omega^2 + 4j\mu\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega)^2} e^{2j\Omega t} - \\ & \frac{\epsilon \beta_0^2 \Omega^6 r^3}{8(\omega_0^2 - 9\Omega^2 + 6j\mu\Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega)^3} e^{3j\Omega t} - \frac{\epsilon \alpha_0^2 a_0 \Omega^2 r (j\mu + \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})}{2(2\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega)} \cdot \\ & \exp \left[-\mu t + j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + j\Omega t + j \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + j\varphi_0 \right] - \\ & \frac{\epsilon \alpha_0^2 a_0 \Omega^2 r (j\mu + \sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})}{2(2\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} - \Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\mu\Omega)} \cdot \\ & \exp \left[-\mu t + j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t - j\Omega t + j \frac{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + j\varphi_0 \right] - \\ & \frac{3\epsilon \beta_0^2 a_0^2 \Omega^2 r}{4[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2]} \exp(-2\mu t + j\Omega t) + \end{aligned}$$

$$\varphi = \frac{\frac{6\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\beta_0^2 a_0^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} T_1 + \varphi_0 \quad (25)$$

把式(23)和式(25)代入式(20),有

$$C = \frac{1}{2} a_0 \cdot$$

$$\exp \left[j \frac{\frac{6\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\beta_0^2 a_0^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} T_1 + j\varphi_0 \right] \quad (26)$$

式中 a_0 和 φ_0 为积分常数,可以由初始条件解出。由此可解得式(16)中 ϵ^1 的解为

$$\begin{aligned}
 & \frac{3\epsilon\beta_0^2 a_0^2 \Omega^2 r \cdot \exp \left[-2\mu t + 2j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + j\Omega t + j \frac{\frac{6\epsilon\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{4\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + 2j\varphi_0 \right]}{8(-4\mu^2 + 3\omega_0^2 + 4j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega^2 + 2j\mu\Omega + 4\Omega\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega)} + \\
 & \frac{3\epsilon\beta_0^2 a_0^2 \Omega^2 r \cdot \exp \left[-2\mu t + 2j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t - j\Omega t + j \frac{\frac{6\epsilon\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{4\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + 2j\varphi_0 \right]}{8(-4\mu^2 + 3\omega_0^2 + 4j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega^2 - 2j\mu\Omega - 4\Omega\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\mu\Omega)} + \\
 & \frac{3\epsilon\beta_0^2 a_0 \Omega^3 r^2}{32(\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2j\mu\Omega)^2} \cdot \\
 & \exp \left[-\mu t + j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + 2j\Omega t + j \frac{\frac{6\epsilon\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + j\varphi_0 \right] + \\
 & \frac{3\epsilon\beta_0^2 a_0 \Omega^3 r^2}{32(-\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} + \Omega)(\omega_0^2 - \Omega^2 - 2j\mu\Omega)^2} \cdot \\
 & \exp \left[-\mu t + j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t - 2j\Omega t + j \frac{\frac{6\epsilon\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + j\varphi_0 \right] + \\
 & \frac{\epsilon\alpha_0^2 a_0^2 (2\mu^2 - \omega_0^2 - 2j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})}{4(-4\mu^2 + 3\omega_0^2 + 4j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})} \exp \left[-2\mu t + 2j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + j \frac{\frac{6\epsilon\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{4\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + 2j\varphi_0 \right] + \\
 & \frac{\epsilon\beta_0^2 a_0^3}{32(-3\mu^2 + 2\omega_0^2 + 3j\mu\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2})} \cdot \\
 & \exp \left[-3\mu t + 3j\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2} t + j \frac{\frac{18\epsilon\beta_0^2 \Omega^4 r^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\mu^2 \Omega^2} + 9\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{8\sqrt{\omega_0^2 - \mu^2}} t + 3j\varphi_0 + \text{c. c.} \right] \quad (28)
 \end{aligned}$$

式(27)也可以写成级数形式,即

$$\begin{aligned}
 x = & A_0 \cos(\Omega t + \theta_0) + A_1 \cos(\Omega t + \theta_1) + A_2 \cos(2\Omega t + \theta_2) + A_3 \cos(3\Omega t + \theta_3) + A_4 + \\
 & a_0 e^{-\mu t} \cos(\varphi t + \varphi_0) + A_{01} e^{-2\mu t} \cos(\Omega t) + A_{40} e^{-2\mu t} + A_{11} e^{-\mu t} \cos[(\varphi + \Omega)t + \theta_{11}] + \\
 & A_{11'} e^{-\mu t} \cos[(\varphi - \Omega)t + \theta_{11'}] + A_{21} e^{-2\mu t} \cos[(2\varphi + \Omega)t + \theta_{21}] + A_{21'} e^{-2\mu t} \cos[(2\varphi - \Omega)t + \theta_{21'}] + \\
 & A_{12} e^{-\mu t} \cos[(\varphi + 2\Omega)t + \theta_{12}] + A_{12'} e^{-\mu t} \cos[(\varphi - 2\Omega)t + \theta_{12'}] + A_{20} e^{-2\mu t} \cos(2\varphi t + \theta_{20}) + \\
 & A_{30} e^{-3\mu t} \cos(3\varphi t + \theta_{30}) \quad (29)
 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 \lambda = \frac{\omega_0}{\Omega} \quad \delta = \frac{2\mu}{\Omega} \quad A_0 = \frac{r}{\sqrt{(\lambda^2 - 1)^2 + \delta^2}} \quad \theta_0 = -\arctan \frac{\delta}{\lambda^2 - 1} \quad A_1 = -\frac{3\epsilon\beta_0^2 A_0^4}{4\Omega^2 r} \quad \theta_1 = 2\theta_0 \\
 A_2 = \frac{\epsilon\alpha_0^2}{2\sqrt{(\lambda^2 - 4)^2 + 4\delta^2}} A_0^2 \quad \theta_2 = -\arctan \frac{2\delta}{\lambda^2 - 4} + 2\theta_0 \quad A_3 = -\frac{\epsilon\beta_0^2}{4\Omega^2 \sqrt{(\lambda^2 - 9)^2 + 9\delta^2}} A_0^3 \\
 \theta_3 = -\arctan \frac{3\delta}{\lambda^2 - 9} + 3\theta_0 \quad A_4 = -\frac{\epsilon\alpha_0^2 A_0^2}{2\lambda^2} \quad \varphi = \frac{1}{2}\Omega\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2} + \frac{3\epsilon\beta_0^2 (2A_0^2 + a_0^2)}{4\Omega\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2}} \\
 A_{01} = -\frac{3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{2\Omega^2 r} A_0^2 \quad A_{40} = -\frac{1}{2}\epsilon\alpha_0^2 a_0^2 \quad A_{11} = -\frac{\epsilon\alpha_0^2 a_0 \lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2} + 1} A_0 \quad \theta_{11} = \arctan \frac{\delta}{\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2}} + \theta_0 + \varphi_0 \\
 A_{11'} = -\frac{\epsilon\alpha_0^2 a_0 \lambda}{\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2} - 1} A_0 \quad \theta_{11'} = \arctan \frac{\delta}{\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2}} - \theta_0 + \varphi_0 \\
 A_{21} = \frac{3\epsilon\beta_0^2 a_0^2}{4\Omega^2 \sqrt{(3\lambda^2 + 1 - \delta^2 + 2\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2})^2 + (\delta\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2} + \delta)^2}} A_0 \\
 \theta_{21} = -\arctan \frac{\delta\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2} + \delta}{3\lambda^2 + 1 - \delta^2 + 2\sqrt{4\lambda^2 - \delta^2}} + \theta_0 + 2\varphi_0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{21'} &= \frac{3\epsilon\beta_0^2a_0^2}{4\Omega^2\sqrt{(3\lambda^2+1-\delta^2-2\sqrt{4\lambda^2-\delta^2})^2+(\delta\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}-\delta)^2}}A_0 \\ \theta_{21'} &= -\arctan\frac{\delta\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}-\delta}{3\lambda^2+1-\delta^2-2\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}}-\theta_0+2\varphi_0 \quad A_{12} = \frac{3\epsilon\beta_0^2a_0}{8\Omega^2(\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}+2)}A_0^2 \quad \theta_{12} = 2\theta_0+\varphi_0 \\ A_{12'} &= \frac{3\epsilon\beta_0^2a_0}{8\Omega^2(-\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}+2)}A_0^2 \quad \theta_{12'} = -2\theta_0+\varphi_0 \quad A_{20} = \frac{\epsilon\alpha_0^2a_0^2\sqrt{(-2\lambda^2+\delta^2)^2+\delta^2(4\lambda^2-\delta^2)}}{4\sqrt{(3\lambda^2-\delta^2)^2+\delta^2(4\lambda^2-\delta^2)}} \\ \theta_{20} &= -\arctan\frac{\delta\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}}{-2\lambda^2+\delta^2}-\arctan\frac{\delta\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}}{3\lambda^2-\delta^2}+2\varphi_0 \\ A_{30} &= \frac{\epsilon\beta_0^2a_0^3}{4\Omega^2\sqrt{(8\lambda^2-3\delta^2)^2+9\delta^2(4\lambda^2-\delta^2)}} \quad \theta_{30} = -\arctan\frac{3\delta\sqrt{4\lambda^2-\delta^2}}{8\lambda^2-3\delta^2}+3\varphi_0 \end{aligned} \quad (30)$$

式中 λ 为刚度转速比, δ 为阻尼转速比, A_i 为振幅, θ_i 为相位, φ 为受迫振动频率.式(29)为耦合振动模型式(9)的通解,包括稳态解和瞬态解两部分.当时间足够大时,衰减项 $e^{-\mu t}$ 会迅速减小到零,通解式(29)就退化为稳态解

$$\begin{aligned} x &= A_0\cos(\Omega t+\theta_0)+A_1\cos(\Omega t+\theta_1)+ \\ &A_2\cos(2\Omega t+\theta_2)+A_3\cos(3\Omega t+\theta_3)+A_4 \end{aligned} \quad (31)$$

式(29)中除掉稳态解式(31),余下的项为瞬态解.

3 计算结果与分析

根据实验台的实际尺寸、质量等参数及实验数据分析,可估计出理论计算参数如下: $m=1\text{ kg}$, $k=10^4\text{ N/m}$, $\omega_0=\sqrt{k/m}=100\text{ Hz}$, $\mu=10\text{ Hz}$, $r=10\text{ }\mu\text{m}$, $\gamma=\epsilon\alpha_0^2m=8\times 10^4\text{ (N}\cdot\text{s}^2)/\text{m}^2$, $\eta=\epsilon\beta_0^2m=2.5\times 10^{12}\text{ N/m}^3$.通过数值模拟计算,分析瞬态时间尺度因子对稳态和瞬态响应的影响,并对比稳态解研究瞬态时间尺度因子的选取方法.

在通解式(29)中,衰减项 $e^{-\mu t}$ 的瞬态时间尺度因子分别取 $t_1=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\text{ s}$ 进行对比, t_1 趋向 ∞ 时为稳态解,结果如图 3 所示.从图 3 中可以看到, t_1 越大, $e^{-\mu t}$ 衰减越快,瞬态解迅速减小,向着稳态解方向收敛. t_1 为无穷大之后只有稳态解.由此可知,瞬态时间尺度因子 t_1 越小,瞬态偏差越大; t_1 越大,瞬态偏差越小,越接近于稳态解.当 $t_1>0.3\text{ s}$ 时,瞬态解的能量衰减已经大于 90%,所以,可以在计算中取 $t_1=0.3\text{ s}$ 来近似描述转子轴系系统准稳态升速过程的时域特征.

在稳态解式(31)中,前两项为 1 倍频项,其中第 1 项为线性项,第 2 项为非线性项,第 3 项和第 4 项分别为 2 倍频和 3 倍频项,第 5 项为常数项.

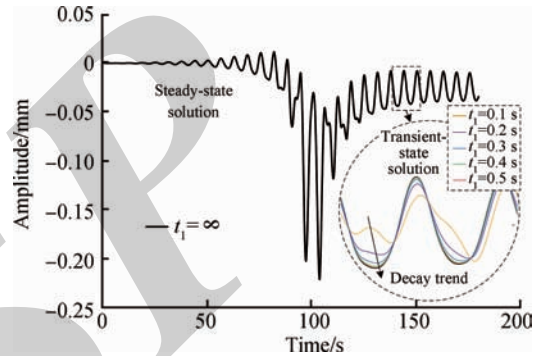


图 3 瞬态时间尺度因子对稳态解和瞬态解的影响
Fig. 3 Influence of transient time scale factor on steady-state solution and transient-state solution

当转子轴系系统的非线性尺度因子 $\epsilon=0$ (或耦合强度比 $\Theta=0$)时, $A_1=A_2=A_3=A_4=0$,稳态解式(31)就只剩下首项 $A_0\cos(\Omega t+\theta_0)$,这就是转子轴系传统的线性振动模型的响应表达式.由于稳态解中各阶倍频的振幅和相位都是转速的函数,不满足快速傅里叶变换(FFT)的时不变条件,所以需要采用短时傅里叶变换(STFT),求得相应的幅频特征如图 4.

图 4(a)给出了稳态解的各阶倍频的 STFT,图 4(b)为图 4(a)的侧视图,图中 1 倍频和 2 倍频的峰值很明显,1 倍频为 $A_0\cos(\Omega t+\theta_0)$ 项,1 倍频峰值左侧约为峰值一半处出现了明显的非线性特征,这个小峰(或小坡)是由 $A_1\cos(\Omega t+\theta_1)$ 项造成的.由于 3 倍频比 1 倍频和 2 倍频小了两个数量级,所以图 4(c)单独给出了 3 倍频的 STFT,图 4(d)为图 4(c)的侧视图,可以明显看出 3 倍频存在双峰特性,这是由于幅值、相位均随转速变化引起的幅频特性变化. STFT 的 1 倍频和 3 倍频都出现了与传统的线性响应 FFT 不同的特征,是因为本文的转子轴系非线性解析模型引入了非线性

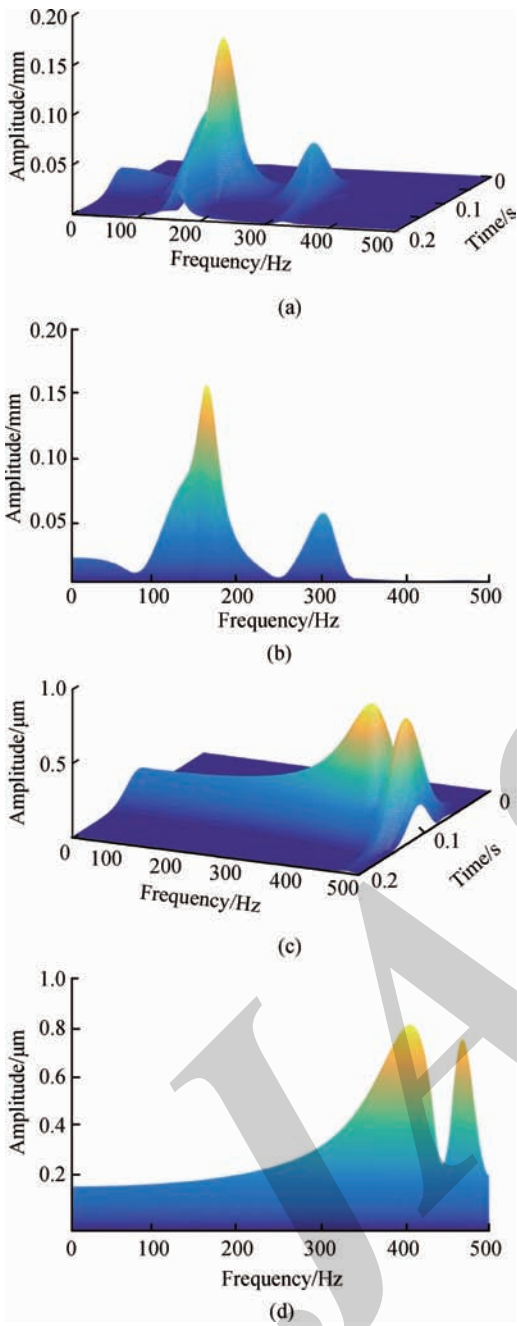


图 4 稳态解的 STFT

Fig. 4 STFT of steady-state solution

尺度因子,故而在解析解和理论计算结果中也体现出了非线性力对转子系统运动特性的一些影响规律和振动机理.因此,在工程实践中需要给予足够的重视.当然,本文的解析结果还需进一步的实验验证和理论分析,这也是下一步工作的重点.

4 结 论

本文针对转子轴系耦合振动问题建立了一个一般性的耦合振动解析模型.该模型引入线性尺度因子、非线性尺度因子和耦合强度比,并分别对

阻尼力和刚度力给出相应的一般表达式.应用多尺度法求解了考虑质量偏心作用的单圆盘转子轴系正阻尼时的耦合振动方程,并给出了相应的稳态解及瞬态解.具体结论如下:

1) 针对转子振动中受到的线性力和非线性力,通过引入线性尺度因子、非线性尺度因子和耦合强度比来描述其阻尼力和刚度力,进而给出一般形式的转子轴系振动模型及其表达式.

2) 应用多尺度法求解正阻尼时的耦合振动模型,并给出稳态解和瞬态解,揭示了转子受到的线性力和非线性力对其响应的影响机理.

3) 分析了非线性尺度因子和瞬态时间尺度因子对转子轴系耦合振动的影响程度.

4) 针对振幅、相位均与转速有关的时变特性,应用 STFT,给出了稳态解的幅频特征,进一步阐述了耦合振动模型及其解析解的合理性和有效性.

参考文献:

- [1] 孟光,孟庆国,詹世革,等.关于加强针对国家重大装备的动力学与控制研究的建议[J].力学进展,2007,37(1):135-141.
MENG Guang, MENG Qingguo, ZHAN Shige, et al. Suggestion on the study of dynamics and control in key equipments[J]. Advances in Mechanics, 2007, 37(1): 135-141. (in Chinese)
- [2] 史麟观.对舰船推进系统发展回顾与展望的若干认识[J].舰船科学技术,2002,24(3):45-56.
SHI Linguan. A review and forecasting of the ship's propelling system development[J]. Ship Science and Technology, 2002, 24(3): 45-56. (in Chinese)
- [3] 孟光.转子动力学研究的回顾与展望[J].振动工程学报,2002,15(1):1-9.
MENG Guang. Retrospect and prospect to the research on rotor dynamics[J]. Journal of Vibration Engineering, 2002, 15(1): 1-9. (in Chinese)
- [4] 杨金福,杨晟博,陈策,等.滑动轴承-转子系统的稳定性研究[J].航空动力学报,2008,23(8):1420-1426.
YANG Jinfu, YANG Shengbo, CHEN Ce, et al. Research on sliding bearing and rotor system stability[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(8): 1420-1426. (in Chinese)
- [5] 杨金福,伍敏.单圆盘转子非线性振动模型及机理[J].航空动力学报,2012,27(8):1738-1745.
YANG Jinfu, WU Min. Single-disc rotor nonlinear vibration model and mechanism[J]. Journal of Aerospace Power, 2012, 27(8): 1738-1745. (in Chinese)
- [6] 黄文虎,武新华,焦映厚,等.非线性转子动力学研究综述[J].振动工程学报,2000,13(4):497-509.
HUANG Wenhui, WU Xinhua, JIAO Yinghou, et al. Review of nonlinear rotor dynamics[J]. Journal of Vibration

Engineering,2000,13(4):497-509. (in Chinese)

[7] WU Min,YANG Jinfu. The research on single-disc rotor nonlinear vibration model and mechanism[J]. Advanced Engineering Forum,2012,2-3:954-959.

[8] Lund J W. The stability of an elastic rotor in journal bearings with flexible damped supports[J]. Journal of Applied Mechanics,1965,32(4):911-918.

[9] Glienicke J,Han D C,Leonhard M. Practical determination and use of bearing dynamic coefficients[J]. Tribology International,1980,13(6):297-309.

[10] Alford J. Protecting turbomachinery from self-excited rotor whirl[J]. Journal of Engineering for Power,1965,87(4):333-344.

[11] Childs D W. Dynamic analysis of turbulent annular seals based on hirs' lubrication equation[J]. Journal of Lubrication Technology,1983,105(3):437-444.

[12] Bently D E,Muszynska A. Role of circumferential flow in the stability of fluid handling machine rotors[C]//The 5th Workshop on Rotor Dynamic Instability Problems in High Performance Turbo Machinery. Texas, US:NASA,1988:1-5.

[13] Bently D E,Muszynska A. Anti-swirl arrangements prevent rotor/seal instability[J]. Journal on Vibration, Acoustics Stress and Reliability in Design,1989,11(1):156-162.

[14] Ravikovich Y A. The construction and design of sliding bearing units[M]. Moscow:Eduction Press,1995. (in Russian)

[15] HAN Dongjiang,YANG Jinfu,CHEN Changting. Experimental research on the dynamic characteristics of gas-hybrid bearing-flexible rotor system[J]. Journal of Vibro-engineering,2014,16(5):2363-2374.

[16] 孟光,薛中擎. 带挤压油膜阻尼器的柔性转子非线性响应的 Duffing 特性分析[J]. 航空动力学报,1989,4(2):173-178.

MENG Guang,XUE Zhongqing. Study on nonlinear doffing characteristics of flexible rotor with SFDB[J]. Journal of Aerospace Power,1989,4(2):173-178. (in Chinese)

[17] Worden K,Tomlinson G R. 结构力学中的非线性问题:系统非线性检测、参数识别与建模[M]. 陈前,高雪,译. 北京:机械工程出版社,2012.

[18] 刘秉正,彭建华. 非线性动力学[M]. 北京:高等教育出版社,2004.

[19] Khalil H K. 非线性系统[M]. 朱义胜,董辉,李作洲,等译. 北京:电子工业出版社,2005.

[20] 周纪卿,朱因远. 非线性振动[M]. 西安:西安交通大学出版社,1998.

[21] 胡海岩. 非线性振动[M]. 北京:航空工业出版社,2000.

[22] 陈予恕. 非线性动力学中的现代分析方法[M]. 北京:科学出版社,1992.

(编辑:陈 越)